GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER

SĂ ÎNVĂȚĂM MATEMATICĂ FĂRĂ PROFESOR CLASA A VIII - A

EDITURA HYPERION
CRAIOVA 2020

CUPRINS

1. Intervale de numere reale. Inecuații în R.

1.1 Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor

1.1.1 Noțiuni teoretice și exemple

1. **Mulțimea** este o noțiune primară, ea nu se definește.

Intuitiv, mulțimea reprezintă o colecție (grupare) de obiecte având o natură bine determinată, obiectele numindu-se **elemente**.

Exemple de mulțimi:

- mulțimea orașelor dintr-o țară;
- mulțimea țărilor de pe întreg pământul;
- mulțimea literelor dintr-un alfabet;
- mulțimea cuvintelor dintr-o limbă;
- mulțimea cifrelor pare;
- mulțimea cifrelor impare;
- mulțimea autovehicolelor dintr-o intreprindere.

2. **Mulțimea** se notează cu litere mari: $A, B, \cdots X, Y, \cdots$, iar elementele unei mulțimi cu litere mici: $a, b, c, \cdots, x, y, z, \cdots$.

3. O mulțime A poate fi reprezentată astfel:

a) prin enumerarea elementelor mulțimii între acolade, fiecare element al mulțimii scriindu-se o singură dată;

Exemple: $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c\}, C = \{1, 2, x, 5, y\}$.

b) cu ajutorul unei proprietăți ce caracterizează elementele mulțimii;

Exemple: 1. A este mulțimea cifrelor pare. Mulțimea A se poate scrie $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$;

2. B este mulțimea literelor cuvântului **matematică.** Mulțimea B se poate scrie $B = \{\mathrm{m, a, t, e, i, c, ă}\}$;

3. C este mulțimea numerelor naturale mai mici decât 30 și care se împart exact la 5. Ea se poate scrie $C = \{0, 5, 10, 15, 20, 25\}$.

4. $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x < 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$;

5. $A = \{x \in \mathbf{N}^* \mid 3 \le x < 8\} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$;

6. $A = \{x \in \mathbf{N}^* \mid x|8\} = \{1, 2, 4, 8\}$;

1.1.2 Probleme rezolvate

1. Determinați mulțimile:

a) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 3n + 2, n = 1,2,3\}$;

b) $B = \{x \in \mathbf{N} \mid 8x + 7 = 79\}$;

c) $C = \{x \in \mathbf{N} \mid x \mid 12\}$.

Soluție. a) $n = 1 \Rightarrow x = 5, n = 2 \Rightarrow x = 8$ și $n = 3 \Rightarrow x = 11$. Atunci $A = \{5, 8, 11\}$.

b) $8x + 7 = 79 \Rightarrow 8x = 79 - 7 \Rightarrow 8x = 72 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow B = \{9\}$.

c) Divizorii lui 12 sunt: 1, 2, 3, 4, 6 și 12.
Atunci: $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

2. Determinați mulțimile:

a) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 4n + 1, n < 7\}$;

b) $B = \{x \in \mathbf{N} \mid 6x - 9 = 51\}$;

c) $C = \{x \in \mathbf{N} \mid 10 < x < 100$ și x este multiplu de $9\}$.

Soluție. a) $n < 7 \Rightarrow n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
$n = 0 \Rightarrow x = 4 \cdot 0 + 1 = 1; n = 1 \Rightarrow n = 4 \cdot 1 + 1 = 5$;
$n = 2 \Rightarrow x = 4 \cdot 2 + 1 = 9; n = 3 \Rightarrow n = 4 \cdot 3 + 1 = 13$;
$n = 4 \Rightarrow x = 4 \cdot 4 + 1 = 17; n = 5 \Rightarrow n = 4 \cdot 5 + 1 = 21$;
$n = 6 \Rightarrow x = 4 \cdot 6 + 1 = 25$.
Atunci $A = \{1, 5, 9, 13, 17, 21, 25\}$.

b) $6x - 9 = 51 \Rightarrow 6x = 51 + 9 \Rightarrow 6x = 60 \Rightarrow x = 60 : 6 = 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow B = \{10\}$.

c) Multiplii de 9 mai mari decât 10 sunt: 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90 și 99. Atunci $C = \{18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99\}$.

3. Fie $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 5x + 7 = 22\}$ și $B = \{x \in \mathbf{N} \mid x \mid 15\}$..
Arătați că $A \subset B$.

Soluție. $5x + 7 = 22 \Rightarrow 5x = 22 - 7 \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3$.
Atunci $A = \{3\}$. Însă $B = \{1, 3, 5, 15\}$, de unde rezultă $A \subset B$.

4. Determinați mulțimile:

a) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid \overline{1x2} \vdots 3\}$;

b) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid \overline{4x8} \vdots 9\}$.

Soluție. a) $\overline{1x2} \vdots 3 \Rightarrow 1 + x + 2 = 3, 6, 9, 12 \Rightarrow x = 0, 3, 6, 9$ și $A = \{0, 3, 6, 9\}$.

b) $\overline{4x8} \vdots 9 \Rightarrow 4 + x + 8 = 18 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow A = \{6\}$.

1.1.3 Probleme propuse spre rezolvare

1. Scrieți mulțimea cifrelor pare și mulțimea cifrelor impare. Arătați că cele două mulțimi au același număr de elemente, egal cu:

2 **3** **4** **5** **6**

2. Determinați mulțimea: $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 5x - 7 = 2x + 14\}$ și arătați că este egală cu: $\{4\}$ $\{5\}$ $\{6\}$ $\{7\}$ $\{8\}$

3. Determinați mulțimile:

$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \mid 12\}$ și $B = \{x \in \mathbf{N} \mid x \mid 16\}$.

Arătați că $A \cap B$ are un număr de elemente egal cu:

1 **2** **3** **4** **5**

4. Scrieți mulțimea numerelor naturale mai mici decât 100 și care sunt multipli de 18. Numărul de elemente al acestei mulțimi este egal cu: **3** **4** **5** **6** **7**

5. Determinați mulțimea:

$A = \{x \in \mathbf{N} \mid 50 < x < 100$ și x este multiplu de $7\}$.

Numărul de elemente al acestei mulțimi este egal cu:

3 **4** **5** **6** **7**

6. Fie mulțimea A a numerelor naturale divizori ai lui 24. Dintre afirmațiile următoare: a) $2 \in A$ b) $5 \in A$ c) $8 \in A$ d) $11 \in A$ e) $16 \in A$ adevărate sunt:

zero **una** **două** **trei** **patru**

7. Scrieți mulțimea formată din resturile posibile ale împărțirii unui număr natural la 7. Mulțimea are un număr de elemente egal cu:

5 **6** **7** **8** **9**

8. Se consideră mulțimile: $A = \{1, 2\}, B = \{1, 4\}, C$ mulțimea divizorilor lui 2, D mulțimea divizorilor lui 3. Dintre afirmațiile de mai jos: a) $A = C$ b) $A = D$ c) $B = C$ d) $B = D$ e) $B = A$ adevărată este: **a)** **b)** **c)** **d)** **e)**

9. Mulțimea $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x < 75$ și x este pătrat perfect$\}$ are un număr de elemente egal cu: **5** **6** **7** **8** **9**

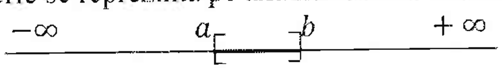
1.2 Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor; intersecția și reuniunea intervalelor

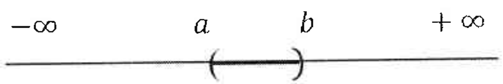
1.2.1 Noțiuni teoretice și exemple

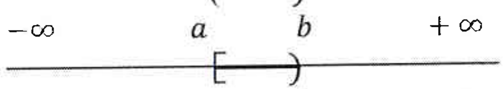
Fiind date numerele $a, b \in \mathbf{R}, a < b$, definim următoarele submulțimi ale lui $\mathbf{R}$ pe care le numim intervale:

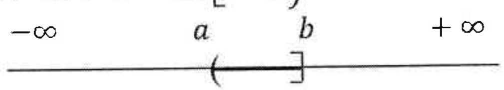
1) $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$ - interval închis în a și b
2) $(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ - interval deschis în a și b
3) $[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$ - interval închis în a, deschis în b
4) $(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$ - interval deschis în a, închis în b
5) $[a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq a\}$ - interval închis la stânga în a și nemărginit la dreapta
6) $(a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$ - interval deschis la stânga în a și nemărginit la dreapta
7) $(-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq b\}$ - interval nemărginit la stânga și închis la dreapta în b
8) $(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$ - interval nemărginit la stânga și deschis la dreapta în b.

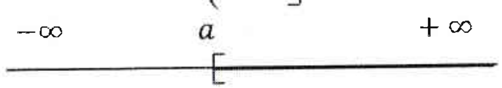
Orice interval numeric se reprezintă pe axa numerelor astfel:

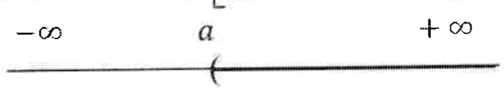
a) intervalul $[a, b]$


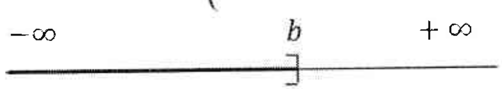
b) intervalul (a, b)


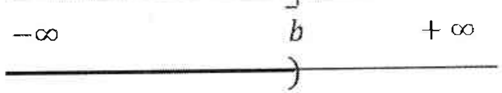
c) intervalul $[a, b)$


d) intervalul $(a, b]$


e) intervalul $[a, \infty)$


f) intervalul (a, ∞)


g) intervalul $(-\infty, b]$


h) intervalul $(-\infty, b)$


Cu intervalele numerice (ca mulțimi) se pot face două operații: **intersecția** și **reuniunea**.

Exemple. a) $[-3, 4] \cap (2, 5) = (2, 4]$.
b) $(3, \infty) \cap (-2, 8) = (3, 8)$.
c) $(-3, 5] \cap [0, \infty) = [0, 5]$.
d) $(-1, 1) \cup (0, 5) = (-1, 5)$.
e) $[0, 9] \cup [-1, 5] = [-1, 9]$.
f) $[0, 15] \cup (3, 20) = [0, 20)$.
g) $[2, \infty) \cup (8, 15] = [2, \infty)$.
h) $(-\infty, 4) \cup (0, 9] = (-\infty, 9]$.

1.2.2 Probleme rezolvate

1. Se consideră intervalele $(-3, 7)$ și $(0, +\infty)$.
Calculați intersecția și reuniunea lor.
Soluție. $(-3, 7) \cap (0, +\infty) = (0, 7)$.
$(-3, 7) \cup (0, +\infty) = (-3, +\infty)$.

2. Se consideră intervalele: $(0, +\infty), (-5, 3), [0, 6], [-1, 12], [0, \infty), [1, 6), (-2, 15], (-\infty, 4)$.
a) determinați toate intervalele care conțin pe 0.
b) determinați toate intervalele care conțin pe -1 și 1.
c) determinați toate intervalele care conțin pe 2 și 3.
Soluție. a) $0 \in (-5, 3)$, deoarece $-5 < 0 < 3$.
$0 \in [0, 6]$, deoarece $0 \leq 0 \leq 6$.
Asemănător: $0 \in [-1, 12], 0 \in [0, \infty), 0 \in (-2, 15], 0 \in (-\infty, 4)$.
b) -1 și 1 aparțin intervalelor: $(-5, 3), [-1, 12], (-2, 15], (-\infty, 4)$.
c) 2 și 3 aparțin intervalelor: $(0, +\infty), [0, 6], [-1, 12], [0, \infty), [1, 6), (-2, 15], (-\infty, 4)$.

3. Fie intervalele: $[1, \sqrt{2}], [1, \sqrt{3}], [1, \sqrt{5}], [1, \sqrt{7}], [1, \sqrt{11}]$.
a) determinați toate intervalele care conțin pe 1.
b) determinați toate intervalele care conțin pe 2.
c) determinați toate intervalele care conțin pe 3.
Soluție. a) 1 aprține tuturor celor 5 intervale din enunț.
b) $2 \in [1, \sqrt{5}]$, deoarece $1 < 2 < \sqrt{5} = 2{,}236$ ...
Asemănător $2 \in [1, \sqrt{7}], [1, \sqrt{11}]$.
c) $3 \in [1, \sqrt{11}]$, deoarece $1 < 3 < \sqrt{11} = 3{,}316$ ...

1.2.3 Probleme propuse spre rezolvare

1. Arătați că numărul natural 3 aparține intervalului:
$(-1,1)$ $(0,3)$ $(1,4)$ $(4,7)$ $(-2,2)$

2. Arătați că numărul întreg -2 aparține intervalului:
$(-1,1)$ $(-2,2)$ $(-3,3)$ $(-1,4)$ $(1,3)$

3. Arătați că numărul natural 5 aparține intervalului:
$(-\infty,1)$ $(0,2)$ $(1,4)$ $(4,+\infty)$ $(-2,3)$

4. Arătați că numărul întreg -3 aparține intervalului:
$(-1,2)$ $(-\infty,-2)$ $(-3,5)$ $(-\infty,-4)$ $(-1,4)$

5. Arătați că numărul natural 4 aparține intervalului:
$(-\infty,1)$ $(0,4)$ $[1,6)$ $(4,5]$, $(-3,3)$

6. Arătați că numărul întreg 8 aparține intervalului:
$(-\infty,8)$ $(0,8)$ $[6,9)$ $(4,7]$, $(9,+\infty)$

7. Arătați că numărul rațional $\frac{2}{3}$ aparține intervalului:
$(-\infty,0)$ $(0,2)$ $[1,4)$ $(4,5]$, $(-3,0)$

8. Arătați că numărul rațional $-\frac{5}{2}$ aparține intervalului:
$(-1,0)$ $(0,1)$ $[1,2)$ $(3,5]$, $(-3,1)$

9. Arătați că numărul irațional $\sqrt{2}$ aparține intervalului:
$(-1,1)$ $(1,3)$ $[-4,1)$ $(3,4]$, $(2,5)$

10. Arătați că numărul irațional $\sqrt{5}$ aparține intervalului:
$(-2,2)$ $(-1,1)$ $[2,3)$ $(3,+\infty]$, $(4,5)$

11. Arătați că numărul irațional $1-\sqrt{2}$ aparține intervalului:
$(-1,0)$ $(1,3)$ $[0,1)$ $(3,4]$, $(4,5)$

12. Se consideră intervalele: $(0,+\infty)$, $(-4,3)$, $[0,7]$, $[-1,11]$, $[0,\infty)$, $[1,4)$, $(-2,13]$, $(-\infty,5)$. Arătați că 0 aparține unui număr de interval egal cu: 3 4 5 6 7

13. Se consideră propozițiile: a) $0\in(0,1)$ b) $3\in(2,4)$ c) $1\in(2,3)$ d) $2\in[2,3]$ e) $1\in(1,+\infty)$ f) $5\in[4,7]$.
Dintre acestea, adevărate sunt:
două **trei** **patru** **cinci** **șase**

14. Se consideră propozițiile: a) $-1\in(-2,0)$ b) $2\in(1,3)$ c) $3\in[3,4)$ d) $4\in(4,5]$ e) $6\in(7,9)$ f) $5\in[5,+\infty)$.
Dintre acestea, adevărate sunt:
două **trei** **patru** **cinci** **șase**

15. Se consideră propozițiile: a) $\frac{2}{3}\in(-2,0)$ b) $\frac{4}{3}\in(1,3)$ c) $\frac{10}{3}\in[3,4)$ d) $4\in(3,5]$ e) $6\in(8,9)$ f) $\frac{4}{3}\in[1,+\infty)$.
Dintre acestea, adevărate sunt:
două **trei** **patru** **cinci** **șase**

16. Se consideră intervalele: $[-1,2]$ și $[0,5]$. Intersecția lor este intervalul: $[-1,0]$ $[-1,5]$ $[0,2]$ $[2,5]$ $[1,2]$

17. Se consideră intervalele: $(-3,1)$ și $(0,2)$. Intersecția lor este intervalul: $(1,2)$ $(0,1)$ $(0,2)$ $(1,3)$ $(-3,0)$

18. Se consideră intervalele: $(-\infty,1)$ și $[0,4)$. Intersecția lor este intervalul: $(-\infty,0)$ $(0,1)$ $[0,1)$ $(1,4)$ $(-\infty,4)$

19. Se consideră intervalele: $(-\infty,2)$ și $[0,+\infty)$. Intersecția lor este intervalul: $(0,+\infty)$ $(0,2)$ $[0,2)$ $(1,4)$ $(-\infty,0)$

20. Se consideră intervalele: $\left(\frac{4}{3},5\right)$ și $(0,3)$. Intersecția lor este intervalul: $(0,3)$ $\left(0,\frac{4}{3}\right)$ $\left(\frac{4}{3},5\right)$ $(1,3)$ $\left(\frac{4}{3},3\right)$

21. Se consideră intervalele: $(-2,1)$ și $(0,4)$. Reuniunea lor este intervalul: $(-2,0)$ $(0,1)$ $(-2,1)$ $(1,2)$ $(-2,4)$

22. Se consideră intervalele: $[3,9)$ și $[4,6]$. Reuniunea lor este intervalul: $[3,9)$ $[4,6]$ $[3,5)$ $(3,6)$ $(2,4)$

1.3 Inecuații de forma $ax + b > 0 (\geq 0, < 0, \leq 0), a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$

1.3.1 Noțiuni teoretice și exemple

1. O inecuație de forma $ax + b > 0 (\geq 0, < 0, \leq 0), a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$ se numește inecuație de gradul întâi.

2. Soluțiile inecuației de forma $ax + b > 0\ (\geq 0), a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ sunt:

a) Dacă $a > 0$, atunci $S = \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$ respectiv $S = \left[-\frac{b}{a}, +\infty\right)$;

b) Dacă $a < 0$, atunci $S = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ respectiv $S = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$.

Soluțiile inecuației de forma $ax + b < 0\ (\leq 0), a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$ sunt:

a) Dacă $a > 0$, atunci $S = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$; respectiv $S = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$.

b) Dacă $a < 0$, atunci $S = \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$; respectiv $S = \left[-\frac{b}{a}, +\infty\right)$.

Exemple. a) $3x + 2 > 0 \Rightarrow x > -\frac{2}{3} \Rightarrow x \in \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$;

b) $-5x + 3 < 0 \Rightarrow 5x - 3 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{5} \Rightarrow x \in \left(\frac{3}{5}, +\infty\right)$.

1.3.2 Probleme rezolvate

1. Rezolvați inecuațiile:

a) $4x + 3 > 2x + 9$; b) $3x - 4 \leq -x + 12$.

Soluție. a) $4x + 3 > 2x + 9 \Rightarrow 4x - 2x > 9 - 3 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow x > 3 \Rightarrow x \in (3, +\infty)$.

b) $3x - 4 \leq -x + 12 \Rightarrow 3x + x \leq 12 + 4 \Rightarrow 4x \leq 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow x \in (-\infty, 4]$.

2. Rezolvați inecuația: $\frac{x+3}{2} < \frac{3x+2}{3}$.

Soluție. Aducând la același numitor obținem:
$3(x + 3) < 2(3x + 2) \Rightarrow 3x + 9 < 6x + 4 \Rightarrow 6x - 3x > 9 - 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x > 5 \Rightarrow x > \frac{5}{3} \Rightarrow x \in \left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$.

3. Rezolvați inecuația: $\frac{2x+7}{2} \leq \frac{5x-1}{4}$.

Soluție. Aducând la același numitor obținem:
$2(2x + 7) \leq 5x - 1 \Rightarrow 4x + 14 \leq 5x - 1 \Rightarrow 5x - 4x \geq 15 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \geq 15 \Rightarrow x \in [15, +\infty)$.

4. Determinați $x \in \mathbf{R}$, care verifică simultan inecuațiile:
$$\frac{2x+7}{2} \geq \frac{5x-1}{4} \text{ și } \frac{3x+2}{2} < \frac{6x-5}{3}.$$

Soluție. $\frac{2x+7}{2} \geq \frac{5x-1}{4} \Rightarrow 4x + 14 \geq 5x - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 14 + 1 \geq 5x - 4x \Rightarrow 15 \geq x \Rightarrow x \in (-\infty, 15]$.
$\frac{3x+2}{2} < \frac{6x-5}{3} \Rightarrow 9x + 6 < 12x - 10 \Rightarrow 6 + 10 < 12x - 9x \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x > 16 \Rightarrow x > \frac{16}{3} \Rightarrow x \in \left(\frac{16}{3}, +\infty\right)$.

Inecuațiile sunt verificate simultan de $x \in (-\infty, 15] \cap \left(\frac{16}{3}, +\infty\right) =$
$= \left(\frac{16}{3}, 15\right)$.

1.3.3 Probleme propuse spre rezolvare

1. Soluția inecuației $4x + 3 > 2x - 5$ este:

$(-4, +\infty)$ $(1, 2)$ $[4, 6)$ $[1, 4]$ $(-1, 1)$

2. Soluția inecuației $3x - 3 \leq 2x + 6$ este:

$(1, +\infty)$ $(1, 4)$ $[-4, 2)$ $[1, 4]$ $(-\infty, 9]$

3. Soluția inecuației $12x - 3 \leq 8x + 5$ este:

$(2, +\infty)$ $(-\infty, 2]$ $[-2, 2)$ $[1, 9]$ $(-\infty, 9)$

4. Soluția inecuației $12x + 7 \geq 10x + 15$ este:

$(-1, +\infty)$ $(-\infty, 0)$ $[4, +\infty)$ $(1, 2)$ $(-\infty, 1)$

5. Soluția inecuației $\frac{x+3}{2} < \frac{3x+2}{3}$ este:

$(-1, +\infty)$ $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ $[0, +\infty)$ $\left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$ $(-\infty, 0)$

6. Soluția inecuației $\frac{-x+4}{3} > \frac{4x+1}{2}$ este:

$(-3, +\infty)$ $\left(-\infty, \frac{5}{14}\right)$ $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$ $\left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$ $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

7. Soluția inecuației $\frac{2x+1}{5} \geq \frac{3x-1}{2} - 4$ este:

$(-1, +\infty)$ $\left(-\infty, \frac{15}{14}\right)$ $\left[\frac{2}{5}, +\infty\right)$ $\left(\frac{45}{11}, +\infty\right)$ $\left(-\infty, \frac{47}{11}\right]$